離散時間訊號與系統
Discrete-time Signals and Systems

陳嘉平 老師

國立中山大學資訊工程學系

102 學年度 離散訊號處理

本節大綱

- 離散時間訊號
  discrete-time signals
- 離散時間系統
  discrete-time systems
- 傅利葉分析
  Fourier analysis
- 週期性訊號
  periodic signals
- 有限區間訊號
  finite-duration signals
- 隨機訊號
  random signals

訊號

訊號帶有訊息。例如

1. 語音信號帶有文字訊息、語者訊息、腔調訊息、情緒訊息等等
2. 影像訊號帶有物件訊息、背景訊息等等

訊號的分析

數學上看，訊號是函數。例如

1. 語音信號是時間的函數
2. 雷達訊號是時間與空間的函數

以下我們討論的範圍爲時間訊號。

時間訊號分類

1. 離散時間訊號與連續時間訊號

$$x[n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. 週期時間訊號與非週期時間訊號

$$x[n+T] = x[n], \quad \forall\ n.$$

3. 有限區間訊號與非有限區間訊號

$$\exists n_0 \text{ such that } x[n] = 0, \quad \forall\ |n| \geq n_0.$$

常見離散時間訊號

1. 單位脈衝訊號 unit impulse
2. 單位步階訊號 unit step
3. 正弦訊號 sinusoidal
4. 指數訊號 exponential
5. 複指數訊號 complex exponential

基本運算

1. 時間平移 time shift
2. 時間反轉 time reversal
3. 加法與純量乘法 addition and scalar multiplication
4. 調變 modulation
5. 壓縮與擴張 compression and expansion
6. 摺積 convolution

單位脈衝訊號 unit impulse function

定義爲

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

時間平移後爲

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理

任何離散時間訊號可以分解爲時間平移單位脈衝訊號之線性組合

$$x[n] = \sum_k x[k]\delta[n-k].$$

單位步階訊號 unit step function

定義爲

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

與單位脈衝訊號之關係

$$u[n] = \sum_{k \geq 0} \delta[n-k],$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

矩形訊號 rectangular

定義爲

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

與前述訊號之關係

$$R_N[n] = \sum_{0 \leq k \leq N-1} \delta[n-k],$$

$$R_N[n] = u[n] - u[n-N].$$

實正弦訊號 sinusoidals

定義爲

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi),$$

其中

1. A 稱爲**振幅** (amplitude)
2. ω_0 稱爲**角頻率** (angular frequency)
3. ϕ 稱爲**相位** (phase).

指數訊號 exponentials

定義爲

$$x[n] = A\alpha^n.$$

$A = |A|e^{j\phi}$、$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$，則

$$x[n] = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)}.$$

複指數訊號 complex exponentials

$|\alpha| = 1$ 時稱爲複指數訊號，此時

$$x[n] = |A|e^{j\omega_0 n+\phi} = |A|\cos(\omega_0 n + \phi) + j|A|\sin(\omega_0 n + \phi).$$

實部與虛部皆爲實正弦訊號。

時間平移 time-shift

若

$$y[n] = x[n-d],$$

$y[n]$ 稱爲 $x[n]$ 的時延 (time-delayed) 或右移 (shifted-to-the-right) 訊號。

時間反轉

$x[n]$ 的時間反轉 (time-reversed) 訊號定義爲

$$y[n] = x[-n].$$

訊號的加法與純量乘法 addition and scalar product

分別定義爲

$$z[n] = x[n] + y[n]$$

$$z[n] = \alpha x[n].$$

訊號的調變 modulation

以訊號 $y[n]$ 調變訊號 $x[n]$ 定義爲

$$z[n] = x[n]\ y[n].$$

意即爲乘積。

訊號的壓縮 compression

以參數 M 壓縮訊號 $x[n]$ 定義爲

$$x_D[n] = x[Mn].$$

擴張 expansion

以參數 N 擴張訊號 $x[n]$ 定義爲

$$x_I[n] = x[n/N], \quad n\%N = 0.$$

摺積 convolution

訊號 $x[n]$ 與 $h[n]$ 的摺積定義爲

$$x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k], \quad n = \ldots, 0, 1, \ldots$$

一步一步 step-by-step

要計算某一時間點 $x[n] * h[n]$ 之值

1. 將 $h[k]$ 作時間反轉，$h'[k] = h[-k]$
2. 將 $h'[k]$ 作時間右移 n，

$$h''[k] = h'[k-n] = h[-(k-n)] = h[n-k]$$

3. 以 $x[k]$ 調變 $h''[k]$
4. 加總

Example

$$x[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2],$$
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2].$$

計算

$$y[n] = x[n] * h[n],$$

以及

$$z[n] = h[n] * x[n].$$

摺積的性質

1. 交換性 commutative

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n].$$

2. 結合性 associative

$$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$$

3. 分配性 distributive

$$x[n] * (h[n] + g[n]) = x[n] * h[n] + x[n] * g[n].$$

離散時間系統

處理離散時間訊號的系統稱爲離散時間系統。以 $x[n]$ 表示輸入訊號，$y[n]$ 表示輸出訊號，則離散時間系統可以表示成

$$y[n] = \mathbb{T}\{x[n]\}.$$

Examples

1. 理想時延 ideal delay

$$y[n] = x[n - n_d].$$

2. 移動平均 moving average

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k].$$

線性系統 liner systems

線性系統即滿足以下性質

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}\{x_1[n] + x_2[n]\} &= \mathbb{T}\{x_1[n]\} + \mathbb{T}\{x_2[n]\} \\
\mathbb{T}\{ax[n]\} &= a\mathbb{T}\{x[n]\}
\end{aligned}
$$

之系統。

Example (累加器 accumulator)

定義為

$$
y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]
$$

為線性系統。

非時變系統 time-invariant systems

若一系統為

$$y[n] = \mathbb{T}\{x[n]\}.$$

將輸入訊號時延後，輸出訊號若滿足

$$\mathbb{T}\{x[n-n_d]\} = y[n-n_d].$$

則稱此系統為非時變系統。

Example

累加器為非時變，因為

$$\mathbb{T}\{x[n-n_d]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_d] = \sum_{k'=-\infty}^{n-n_d} x[k'] = y[n-n_d].$$

Example (壓縮器 compressor)

定義爲

$$y[n] = \mathbb{T}\{x[n]\} = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty.$$

將輸入訊號做時延，則

$$\mathbb{T}\{x[n-n_d]\} = x[Mn-n_d],$$
$$y[n-n_d] = x[M(n-n_d)].$$

因此，

$$\mathbb{T}\{x[n-n_d]\} \neq y[n-n_d].$$

故爲非非時變系統。

因果性系統 causal systems

若系統任何時間點的輸出訊號不受之後的輸入訊號所影響，則稱爲因果性系統。

Examples

以下何者爲因果性系統？

1. 累加器？
2. 移動平均？
3. 前向差分器？
$$y[n] = x[n+1] - x[n].$$
4. 後向差分器？
$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

穩定系統 stable systems

有上下界限輸入訊號之輸出訊號恆爲有界限（bounded in bounded out, BIBO）之系統稱爲**穩定系統**。

$$|x[n]| \leq B_x \quad \Rightarrow \quad |y[n]| \leq B_y$$

Examples

以下何者爲穩定系統？

1. 累加器？
2. 移動平均？

脈衝響應函數 impulse response functions

輸入訊號爲單位脈衝函數時，輸出訊號稱爲脈衝響應函數，

$$h[n] = \mathbb{T}\{\delta[n]\}.$$

Examples

1. 理想時延 $\delta[n] \longrightarrow \delta[n]$
2. 移動平均

$$\delta[n] \longrightarrow \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] = h[n]$$

3. 累加器

$$\delta[n] \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] = h[n]$$

4. 前向差分 $\delta[n] \longrightarrow \delta[n+1] - \delta[n] = h[n]$
5. 後向差分 $\delta[n] \longrightarrow \delta[n] - \delta[n-1] = h[n]$

線性非時變系統 linear time-invariant systems

既是線性又是非時變之系統稱之。

定理

線性非時變系統之輸出訊號爲輸入訊號與脈衝響應函數之摺積。

證明

根據線性與非時變，可得

$$y[n] = \mathbb{T}\{x[n]\} = \mathbb{T}\left\{\sum_m x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_m x[m]\mathbb{T}\{\delta[n-m]\}$$
$$= \sum_m x[m]h[n-m].$$

穩定系統之充要條件

$$\sum_n |h[n]| < \infty.$$

證明

假設系統爲穩定。考慮以下輸入訊號

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[-n] \neq 0 \\ 0, & h[-n] = 0. \end{cases}$$

輸出訊號在 $n = 0$ 須爲有限，因此

$$|y[0]| \leq B \Rightarrow \left| \sum_k x[-k]h[k] \right| \leq \left| \sum_k \frac{h^*[k]}{|h[k]|} h[k] \right| = \sum_k |h[k]| \leq B$$

因果性系統之充要條件

$$h[n] = 0, \quad \text{for } n < 0.$$

證明

可由下式看出

$$y[n] = \sum h[k]x[n-k] = \sum_{k \geq 0} h[k]x[n-k].$$

因果性訊號

滿足

$$x[n] = 0, \quad \text{for } n < 0$$

之訊號稱爲因果性訊號。

系統之連接

1. **串聯系統**之脈衝響應函數

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n].$$

2. **並聯系統**之脈衝響應函數

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$

Examples

1. 前向差分與單位時間延遲之串聯

$$h[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

2. 後向差分與累加器之串聯

$$h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n].$$

逆系統 inverse systems

一個系統與其逆系統須滿足

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n].$$

找法

從 $h[n]$ 直接找 $h_i[n]$ 比較困難。經過轉換，利用轉換後的函數可有比較容易的做法。

線性常係數差分方程 linear constant-coefficient difference equation

LCCDE 定義爲

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m].$$

N 稱爲此 LCCDE 的階 (order)。

Example (累加器之 LCCDE)

$$y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n]$$

爲 LCCDE，其中

$$N=1,\ a_0=1,\ a_1=-1,\ M=0,\ b_0=1.$$

LCCDE 非唯一性

因果性移動平均系統可以寫成

$$y[n] = \frac{1}{M_2+1}\sum_{m=0}^{M_2} x[n-m],$$

也可以寫成

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n-M_2-1]).$$

兩組 LCCDE 顯然不同，卻是描述同一系統。

有限脈衝響應與無限脈衝響應

若系統之脈衝響應爲有限區間，則稱爲**有限脈衝響應** (finite impulse response, FIR)。否則，稱爲**無限脈衝響應** (infinite impulse response, IIR).

Example

零階 LCCDE

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$$

爲 FIR，因其脈衝響應函數爲

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} \left(\frac{b_m}{a_0}\right) \delta[n-m] = \begin{cases} \left(\frac{b_m}{a_0}\right), & 0 \leq m \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

LTI 系統之本徵訊號

複指數訊號爲LTI 系統之本徵訊號。

證明

假設 LTI 系統之脈衝響應函數爲 $h[n]$。輸入訊號爲 $e^{j\omega n}$ 時輸出訊號爲

$$
\begin{aligned}
y[n] = x[n] * h[n] &= \sum_m h[m] e^{j\omega(n-m)} = \left(\sum_m h[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \\
&= H(e^{j\omega}) x[n].
\end{aligned}
$$

因此，$e^{j\omega n}$ 爲本徵訊號，其本徵值爲

$$
H(e^{j\omega}) = \sum_m h[m] e^{-j\omega m}.
$$

頻率響應 frequency response

$H(e^{j\omega})$ 稱爲系統的**頻率響應**。若表示成

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j(\arg H(e^{j\omega}))},$$

則

1. $|H(e^{j\omega})|$ 稱爲**振幅響應** (magnitude response).
2. $\arg H(e^{j\omega})$ 稱爲**相位響應** (phase response).

線性疊加原理 principle of superposition

$H(e^{j\omega})$ 爲 LTI 系統。以複指數訊號的線性組合

$$x[n]=\sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

爲輸入訊號，則輸出訊號爲

$$y[n]=\sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n} H(e^{j\omega_k}).$$

離散時間傳立葉轉換 discrete-time Fourier transform

訊號 $x[n]$ 的**離散時間傳立葉轉換** (DTFT) 定義爲

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n]e^{-j\omega n}.$$

$X(e^{j\omega})$ 又稱爲**頻譜** (spectrum)。

頻率響應

LTI 系統之頻率響應爲其脈衝響應函數之 DTFT，因爲

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m} h[m]e^{-j\omega m}.$$

Examples

1. 理想時延

$$h[n]=\delta[n-n_d] \;\Rightarrow\; H(e^{j\omega})=\sum_n \delta[n-n_d]e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_d}.$$

2. 移動平均

$$h[n]=\left({}^{1}\!/\!_{M_1+M_2+1}\right)\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta[n-k]$$

$$\Rightarrow\; H(e^{j\omega})=\left({}^{1}\!/\!_{M_1+M_2+1}\right)\sum_{k=-M_1}^{M_2}e^{-j\omega k}$$

$$=\left({}^{1}\!/\!_{M_1+M_2+1}\right)\frac{\sin[\omega(M_1+M_2+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$$

正弦訊號輸入

輸入訊號爲

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

輸出訊號爲

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

$h[n]$ 爲實函數，則 $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$，所以

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \theta), \quad \theta = \arg H(e^{j\omega_0}).$$

以理想時延系統爲例，結果爲

$$y[n] = A\cos(\omega_0(n - n_d) + \phi) = x[n - n_d].$$

訊號重建定理

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

證明

利用

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n')} d\omega = \delta[n-n'].$$

訊號之解析

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n}.$$

訊號之合成

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

DTFT 之性質

1. 線性 linearity

$$c_1x_1[n]+c_2x_2[n] \longleftrightarrow c_1X_1(e^{j\omega})+c_2X_2(e^{j\omega})$$

2. 時間平移 time shifting

$$x[n-n_d] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$$

3. 頻率平移 frequency shifting

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4. 時間反轉 time reversal

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

頻譜微分定理

$$nx[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Parseval's 定理

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

摺積定理

$$h[n] * x[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

調變定理

$$h[n]x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

週期性脈衝訊號 periodic impulse sequence

週期性脈衝訊號 定義為

$$\tilde{\delta}_N[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN].$$

N 為週期。

週期性正餘弦訊號

複指數訊號 $e^{j\omega n}$ 角頻率為

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

時，亦為週期性訊號，週期為 N。

恆等式

$$\tilde{\delta}_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

證明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} &= (n\%N == 0)\ ?\ N : 0 \\ &= N\tilde{\delta}_N[n]\end{aligned}$$

延伸

$$\tilde{\delta}_N[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}km}e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

週期性訊號之表示

週期性訊號為週期性脈衝訊號之線性組合

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m]\tilde{\delta}_N[n-m].$$

利用先前結果，可得

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.\end{aligned}$$

離散傅立葉級數 discrete Fourier series

將週期性訊號表示爲複指數訊號之線性組合，稱爲離散傅立葉級數。

根據前頁結果，

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

其中的係數爲

$$\tilde{X}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}.$$

有限區間訊號 finite-duration sequence

長度為 N 的**有限區間訊號**定義為

$$x[n] = 0, \quad n > N - 1 \text{ or } n < 0$$

週期性展延 periodic extension

有限區間訊號的**週期性展延**定義為

$$\tilde{x}[n] = x[n \% N].$$

即週期性地重複有限區間訊號。

係數與頻譜

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\omega_k=\frac{2\pi}{N}k}.$$

頻域取樣定理 frequency-domain sampling theorem

$x[n]$ 爲有限區間，則其頻譜 $X(e^{j\omega})$ 可經由以下的取樣點重建

$$\omega = \omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \;\; k = 0, \ldots, N-1.$$

證明

$X(e^{j\omega_k}) = \tilde{X}[k]$，因此可以

1. 重建週期性延伸訊號 $\tilde{x}[n]$
2. 抽取一個週期 $x[n]$
3. 作離散時間傅立葉轉換得到 $X(e^{j\omega})$

隨機訊號 random signal

離散時間訊號通常爲隨機。因此，應該以離散時間隨機過程描述。

平均值與相關數

平均值定義爲

$$m_x[k] = E[x[k]].$$

相關數定義爲

$$\phi_{xx}[k,l] = E[x[k]x[l]].$$

廣義穩態訊號 wide-sense stationary signal

平均值與相關數不隨時間而變的訊號稱爲廣義穩態訊號。此時

$$m_x = E[x[n]],$$

$$\phi_{xx}[m] = E[x[n]x[n+m]].$$

$\phi_{xx}[\cdot]$ 稱爲**自相關函數** (auto-correlation sequence)。

輸出訊號

輸入訊號爲廣義穩態隨機訊號時，輸出訊號亦爲隨機。其平均值爲

$$E[y[n]] = E\left[\sum h[k]x[n-k]\right] = \sum h[k]E[x[n-k]] = m_x \sum h[k].$$

自相關函數爲

$$\phi_{yy}[m] = E[y[n]y[n+m]] = \sum_k \sum_r h[k]h[r]\phi_{xx}[m+k-r] = \sum_l c_{hh}[l]\phi_{xx}[m-l],$$

其中 $c_{hh}[l] = \sum_k h[k]h[k+l]$。

功率頻譜密度 power spectral density

$\phi_{xx}[m]$、$\phi_{yy}[m]$、與 $c_{hh}[l]$ 之 DTFT 分別爲 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$、$\Phi_{yy}(e^{j\omega})$、與 $C_{hh}(e^{j\omega})$。根據摺積定理

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C_{hh}(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega}).$$

考慮輸出訊號，其功率爲

$$\begin{aligned} E[y[n]^2] = \phi_{yy}[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{yy}(e^{j\omega})d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \geq 0. \end{aligned}$$

故 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 又稱爲**功率頻譜密度**。

白色噪音 white noises

白色噪音訊號定義爲

$$m_x = 0, \quad \phi_{xx}[m] = \sigma^2 \delta[m].$$

其功率頻譜密度爲

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2.$$

故其功率爲

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma^2 d\omega = \sigma^2.$$

隨機訊號產生器

利用 LTI 系統與白色噪音訊號，可以產生想要的隨機訊號。因爲

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\sigma^2,$$

我們可以調整 $H(e^{j\omega})$ 與 σ 得到想要的 $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$。

LTI 系統函數估計

輸入訊號與輸出訊號的互相關函數爲

$$\phi_{xy}[m] = \sum_k h[k]\phi_{xx}[m-k].$$

利用白色噪音爲輸入訊號，則

$$\phi_{xy}[m] = \sigma^2 h[m], \quad \Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma^2 H(e^{j\omega})$$

可以用來估計 $h[n]$。