連續時間訊號取樣

陳嘉平 老師

國立中山大學 資訊工程學系

102 學年度 離散訊號處理

本章大綱

- 週期性取樣
  periodic sampling
- 取樣在頻域之表示
  frequency-domain representation of sampling
- 連續時間訊號之重建
  reconstruction of a continuous-time signal
- 離散時間處理連續時間訊號
  discrete-time processing of continuous-time signals
- 連續時間處理離散時間訊號
  continuous-time processing of discrete-time signals
- 改變取樣頻率
  changing the sampling rate

週期性取樣 periodic sampling

連續時間訊號 $x_c(t)$ 的週期性取樣定義爲

$$x[n] = x_c(nT).$$

1. T 稱爲**取樣週期** (sampling period)。
2. T 的倒數 $f = \frac{1}{T}$ 稱爲**取樣頻率** (sampling frequency)。

奈奎斯特定理 Nyquist thoerem

如果 $x_c(t)$ 為有限頻帶，而且取樣週期 T 夠小，則 $x_c(t)$ 可以由取樣點 $x[n] = x_c(nT)$ 重建。

連續函數可以由離散的點重建。

連續時間傅立葉轉換 continuous-time Fourier transform

連續時間函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換定義爲

$$F(j\Omega) = \int f(t)e^{-j\Omega t}dt.$$

$F(j\Omega)$ 又稱爲 $f(t)$ 的頻譜 (spectrum)。

逆轉換

逆轉換定義爲

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int F(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega.$$

Example (狄拉克脈衝函數 Dirac δ-function)

狄拉克脈衝函數定義爲

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \int \delta(t) dt = 1.$$

其傅立葉轉換爲

$$\Delta(j\Omega) = \int \delta(t) \cdot e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

其頻譜是平的。

Example (常數函數)

考慮

$$x_c(t) = 1.$$

因爲

$$\frac{1}{2\pi}\int X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \int \delta(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = 1 = x_c(t).$$

故其傅立葉轉換應爲

$$X_c(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega).$$

也就是頻譜爲脈衝函數。

Example (調頻 frequency modulation)

$x_c(t)$ 的調頻訊號

$$y_c(t) = x_c(t)e^{j\Omega_0 t}$$

之傅立葉轉換爲

$$\begin{aligned} Y_c(j\Omega) &= \int y_c(t)e^{-j\Omega t}dt = \int x_c(t)e^{j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt \\ &= \int x_c(t)e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}dt \\ &= X_c(j(\Omega-\Omega_0)) \end{aligned}$$

因此，$e^{j\Omega_0 t}$ 的傅立葉轉換爲

$$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0).$$

週期性脈衝函數 periodic impulse train

週期爲 T 的**週期性脈衝函數** $s(t)$ 定義爲

$$s(t) = \sum_{n} \delta(t - nT).$$

因爲 $s(t)$ 爲週期性，可以表示成傅立葉級數

$$s(t) = \sum_{k \in Z} c_k e^{j\Omega_k t}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{T} k.$$

係數 c_k 爲

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\Omega_k t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_n \delta(t - nT) e^{-j\Omega_k t} dt = \frac{1}{T}.$$

因此，$s(t)$ 的頻譜爲

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_k \delta(\Omega - \Omega_k) = \frac{2\pi}{T} \sum_k \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right).$$

時域週期性脈衝函數與有頻域週期性脈衝頻譜。

以週期性脈衝函數取樣 sampling by periodic impulse train

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t)\sum_n \delta(t-nT) = \sum_n x_c(nT)\delta(t-nT).$$

頻譜關係

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * \sum_k \frac{2\pi}{T}\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(j\left(\Omega - k\Omega_s\right)\right)$$

1. $X_s(j\Omega)$ 爲多個複製平移的 $X_c(j\Omega)$ 之和。
2. 如果複製平移的頻譜均不重複，則可以從中抽取出 $X_s(j\Omega)$。

有限頻帶信號 bandlimited signal

如果存在 Ω_c 使得

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{for} \quad |\Omega| > \Omega_c$$

則訊號 $x_c(t)$ 稱爲有限頻帶。

奈奎斯特頻率 Nyquist frequency

$x_c(t)$ 的**奈奎斯特頻率**爲頻譜值不爲零的頻率上限。

交疊 aliasing

要使相鄰複製頻譜不重疊，右邊頻譜左端必須在左邊頻譜右端之右。也就是

$$\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N \quad \text{or} \quad \Omega_s \geq 2\Omega_N.$$

其中 Ω_N 爲奈奎斯特頻率，$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$。否則稱爲交疊。

重建 reconstruction

若沒有交疊，利用低通濾波器可以從 $X_s(j\Omega)$ 取出 $X_c(j\Omega)$。其截止頻率須滿足

$$\Omega_N \leq \Omega_c \leq \Omega_s - \Omega_N.$$

Ω_c 可以選

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} \geq \Omega_N.$$

奈奎斯特取樣定理 Nyquist sampling theorem

$x_c(t)$ 爲有限頻帶訊號，其奈奎斯特頻率爲 Ω_N。則 $x_c(t)$ 由以下取樣點決定

$$x[n] = x_c(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

其中取樣週期須滿足

$$\frac{2\pi}{T} = \Omega_s \geq 2\Omega_N.$$

奈奎斯特率 Nyquist rate

欲重建訊號，取樣角頻率需至少爲奈奎斯特頻率之兩倍。$2\Omega_N$ 稱爲奈奎斯特率。

週期性脈衝取樣訊號之頻譜

利用 $\delta(\cdot)$ 的篩選特性

$$
\begin{aligned}
X_s(j\Omega) &= \int x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \int \sum_n x_c(nT)\delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \int \sum_n x[n]\delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_n x[n] e^{-j(\Omega T)n} \\
&= X(e^{j\Omega T}).
\end{aligned}
$$

所以 $x_s(t)$ 的頻譜 $X_s(j\Omega)$ 是 $x[n]$ 的頻譜 $X(e^{j\omega})$ 的相似版本。頻率 $(0, \Omega_s = \frac{2\pi}{T})$ 對應到正規化頻率 $(0, 2\pi)$。

離散時間訊號與連續時間訊號頻譜之關係

回到 $x_c(t)$，其傅立葉轉換爲 $X_c(j\Omega)$。$x[n] = x_c(nT)$，其傅立葉轉換爲 $X(e^{j\omega})$。則

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right). \end{aligned}$$

Example (取樣角頻率大於奈奎斯特率)

訊號 $x_c(t) = \cos(4000\pi t)$，取樣週期爲 $T = {}^1/_{6000}$

$$x[n] = x_c(nT) = \cos\left(4000\pi \cdot n \cdot {}^1/_{6000}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right).$$

取樣角頻率爲

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 12000\pi > 2\Omega_N = 8000\pi,$$

因此沒有交疊。重建的訊號爲

$$x_r(t) = \cos(4000\pi t).$$

Example (取樣角頻率不足)

提高訊號頻率至 $y_c(t) = \cos(16000\pi t)$。用相同的取樣週期

$$y[n] = y_c(nT) = \cos\left(16000\pi \cdot n \cdot {}^{1}/_{6000}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = x[n].$$

既然 $y[n] = x[n]$，重建訊號同於 $x_r(t)$，所以

$$y_r(t) = \cos(4000\pi t) \neq y_c(t).$$

交疊失真的原因是

$$\Omega_s = 12000\pi < 2\Omega_N = 32000\pi.$$

Example (取樣角頻率不足)

訊號 $z_c(t) = \cos(4000\pi t)$，改變取樣週期爲 $T = {}^1/_{1500}$，

$$z[n] = z_c(nT_z) = \cos\left(4000\pi \cdot n \cdot {}^1/_{1500}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = x[n].$$

發生交疊失真，原因是

$$\Omega_s = 3000\pi < 2\Omega_N = 8000\pi.$$

重建訊號頻率爲

$$\Omega_r = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\,\Omega_s = \frac{1}{3}\,3000\pi = 1000\pi.$$

3 個例子分別爲

1. $x_c(t) = \cos(4000\pi t),\ \Omega_s = 12000\pi$

$$x_r(t) = \cos(4000\pi t) = x_c(t)$$

2. $y_c(t) = \cos(16000\pi t),\ \Omega_s = 12000\pi$

$$y_r(t) = \cos(4000\pi t) \neq y_c(t)$$

3. $z_c(t) = \cos(4000\pi t),\ \Omega_s = 3000\pi$

$$z_r(t) = \cos(1000\pi t) \neq z_c(t)$$

理想重建系統 ideal reconstruction system

參數爲 T 的理想重建系統 i.r.s. 將離散時間訊號 $x[n]$ 轉換爲連續時間訊號 $x_r(t)$ 使得

$$x_r(nT) = x[n].$$

方塊圖

顯然 i.r.s. 滿足

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{i.r.s.}} \xrightarrow{x_r(t)} \boxed{\text{s. w. } T} \longrightarrow x[n]$$

也可以表示成 (省略 T)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{D/C}} \xrightarrow{x_r(t)} \boxed{\text{C/D}} \longrightarrow x[n]$$

重建 2 步驟

1. 以 $x[n]$ 爲權重生成脈衝訊號

$$x_s(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT).$$

2. 將 $x_s(t)$ 通過重建濾波器，脈衝響應函數爲 $h_r(t)$，產生重建訊號

$$x_r(t) = \sum_n x[n]h_r(t - nT).$$

方塊圖見 Figure 4.8。

重建濾波器

重建濾波器爲理想低通濾波器，其頻率響應函數爲

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

所對應的脈衝響應函數爲

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

重建之訊號

輸入爲 $x[n]$，通過理想重建系統之後的輸出訊號爲

$$x_r(t) = \sum_m x[m] \frac{\sin(\pi(t - mT)/T)}{\pi(t - mT)/T}.$$

取樣點的重建訊號值

$t = nT$ 時，

$$x_r(nT) = \sum_m x[m] \frac{\sin(\pi(t - mT)/T)}{\pi(t - mT)/T} = x[n].$$

如果 $x[n]$ 是從 $x_c(t)$ 取樣而來，$x_r(t)$ 與 $x_c(t)$ 在 $t = nT$ 必然相等。

Example (有限頻帶的情況)

重建訊號 $x_r(t)$ 的頻譜爲

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = \left(|\Omega| < \frac{\pi}{T}\right) \; ? \; TX_s(j\Omega) : 0.$$

假設 $x[n]$ 從有限頻帶訊號 $x_c(t)$ 取樣而來，其奈奎斯特頻率滿足

$$\Omega_N < \frac{\pi}{T}.$$

無論 $|\Omega| < \frac{\pi}{T}$ 或是 $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$，均爲

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega).$$

所以 $x_r(t) = x_c(t)$。

有限頻帶訊號重建公式

奈奎斯特頻率爲 Ω_N 的有限頻帶訊號，只要 T 夠小使得

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N,$$

則

$$x_c(t) = \sum_n x_c(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}.$$

見 Figure 4.9。

連續時間系統 continuous-time system

連續時間系統 (CTS) 將連續時間輸入訊號轉變爲連續時間輸出訊號。

脈衝響應函數 impulse response

LTI 連續時間系統之輸入訊號爲狄拉克脈衝函數時的輸出訊號，稱爲其脈衝響應函數。

$$h(t) = S\left(\delta(t)\right).$$

輸出爲摺積

$$\begin{aligned} y(t) = S\left(x(t)\right) &= S\left(\int x(t')\delta(t-t')dt'\right) \\ &= \int x(t')h(t-t')dt'. \end{aligned}$$

頻率響應函數 frequency response

脈衝響應函數的傅立葉轉換。

頻域關係

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega).$$

連續時間訊號處理

取樣 (C/D)

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{C/D}} \longrightarrow x[n],$$

離散時間系統 (DTS)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{DTS}} \longrightarrow y[n],$$

重建系統 (D/C)

$$y[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{D/C}} \longrightarrow y_r(t)$$

組合起來爲連續時間訊號處理系統

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{C/D}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{\mathrm{DTS}} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\mathrm{D/C}} \longrightarrow y_r(t)$$

基本問題

1. 等效頻率響應函數爲何？
$$H_{\mathrm{eff}}(j\Omega) = \frac{Y_r(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} \ ?$$
2. 相反的，如果想要的頻率響應函數爲 $H_c(j\Omega)$，如何決定 T 與 $h[n]$ 使得
$$H_{\mathrm{eff}}(j\Omega) \approx H_c(j\Omega) \ ?$$

頻域關係

$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{C/D}} \longrightarrow x[n]$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right).$$

$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{DTS}} \longrightarrow y[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega}).$$

$y[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{D/C}} \longrightarrow y_c(t)$

$$Y_r(j\Omega) = \left(|\Omega| < \frac{\pi}{T}\right)\ ?\ \left(TY_s(j\Omega) = TY\left(e^{j\Omega T}\right)\right)\ :\ 0$$

輸出訊號 $y_r(t)$ 與輸入訊號 $x_c(t)$ 的頻譜爲

$$
\begin{aligned}
Y_r(j\Omega) &= TY\left(e^{j\Omega T}\right) = TH(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}) \\
&= H(e^{j\Omega T})\sum_k X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right), \quad |\Omega| \le \frac{\pi}{T}.
\end{aligned}
$$

因此，等效頻率響應爲

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{eff}}(j\Omega) &= \frac{Y_r(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} \\
&= H(e^{j\Omega T})\left[1 + \frac{\sum_{k\neq 0} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T}))}{X_c(j\Omega)}\right], \quad |\Omega| \le \frac{\pi}{T}.
\end{aligned}
$$

輸入訊號頻帶爲有限

若選夠小的 T 使得 $\Omega_N \leq \pi/T$，等效頻率響應爲

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \frac{Y_r(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| \leq \Omega_N.$$

要使得頻率響應爲 $H_c(j\Omega)$，離散時間系統之頻率響應須滿足

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right),$$

故 $H_c(j\Omega)$ 須爲有限頻帶。

Example (ideal lowpass filter)

若離散時間系統爲理想低通濾波器，整個系統的頻率響應爲何？

$$H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

若是沒有交疊，則頻率響應爲

$$H_{\mathrm{eff}}(j\Omega) = H_{\mathrm{lp}}(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \frac{\omega_c}{T}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

整個系統爲截止頻率爲 $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T}$ 的理想低通濾波器。

微分器 differentiator

連續時間訊號微分

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t)$$

的頻域關係爲

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega\right\} = \frac{1}{2\pi}\int j\Omega X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$
$$= y_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int Y_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega.$$

也就是

$$H_c(j\Omega) = \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = j\Omega.$$

當需要處理的輸入訊號爲有限頻寬 $\Omega_N \leq \pi/T$ 時，以下頻率響應即可

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| \leq \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$

因此，離散時間系統的頻率響應爲

$$H(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi,$$

所對應的脈衝響應函數爲

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Example (正弦訊號的微分)

以正弦訊號輸入上述連續時間訊號微分器

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t, \quad \Omega_0 < \pi / T.$$

則

$$\begin{aligned}
& x[n] = \cos \omega_0 n, \quad \omega_0 = \Omega_0 T \\
\Rightarrow \quad & X(e^{j\omega}) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right], \quad |\omega| < \pi \\
\Rightarrow \quad & Y(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T} \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right] \\
\Rightarrow \quad & Y_r(j\Omega) = TY(e^{j\Omega T}) = j\Omega T \pi \left[\delta(\Omega T - \Omega_0 T) + \delta(\Omega T + \Omega_0 T) \right] \\
\Rightarrow \quad & y_r(t) = -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) = \frac{d}{dt} x_c(t).
\end{aligned}$$

脈衝不變性 impulse invariance

頻率響應 $H_c(j\Omega)$ 爲有限頻帶，對應的脈衝響應函數爲 $h_c(t)$。令

$$h[n] = Th_c(nT).$$

在連續時間系統用 $h[n]$ 爲離散時間系統時，等效的頻率響應滿足

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = H_c(j\Omega).$$

證明

$H_c(j\Omega)$ 爲有限頻帶，故可選擇 T 使得 $H_c(j\Omega) = 0, \ |\Omega| > \pi/T$。
令 $g[n] = h_c(nT)$。根據取樣頻譜之間的關係，可知

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_k H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right).$$

這些項並不交疊。

在正規頻率範圍 $(-\pi, \pi)$ 之間

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi.$$

令 $h[n] = Tg[n]$，可得

$$H(e^{j\omega}) = TG(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi.$$

因此，

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = H_c(j\Omega), \quad |\Omega| \leq \frac{\pi}{T}.$$

Example (lowpass filter)

理想低通濾波器頻率響應爲

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases}$$

此濾波器顯然爲有限頻帶。根據脈衝不變性，離散系統的脈衝響應函數 $h[n]$ 爲 $h_c(t)$ 取樣後的訊號。

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}.$$

所以

$$h[n] = T\ h_c(nT) = T\ \frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad \omega_c = \Omega_c T.$$

離散時間系統

我們可以串接 D/C 轉換器、連續時間系統、以及 C/D 轉換器，來得到離散時間系統。

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{D/C}} \xrightarrow{x_c(t)} \boxed{\mathrm{CTS}} \xrightarrow{y_c(t)} \boxed{\mathrm{C/D}} \longrightarrow y[n]$$

各模組輸出入訊號頻譜關係

1. D/C 爲理想重建系統，頻譜關係爲

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T}.$$

2. CTS: $x_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{CTS}} \longrightarrow y_c(t)$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

3. C/D: $y_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{C/D}} \longrightarrow y[n]$ $\quad y_c(t)$ 爲有限頻帶，沒有交疊，所以

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\, Y_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi.$$

頻率響應函數

綜上，

$$H_{\text{eff}}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{T}Y_c(j\frac{\omega}{T})}{\frac{1}{T}X_c(j\frac{\omega}{T})} = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi.$$

反之，給定頻率響應 $H_d(e^{j\omega})$，CT 系統的頻率響應應爲

$$H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) = H_{\text{eff}}(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}), \quad |\omega| < \pi.$$

也就是

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ \text{arbitrary}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Example (delay)

希望離散時間系統頻率響應爲

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta},$$

則 CT 系統的頻率響應爲

$$H_c(j\Omega) = H_d(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega T\Delta}.$$

因此

$$\begin{aligned} & h_c(t) = \delta(t - T\Delta) \\ \Rightarrow \quad & y_c(t) = x_c(t - T\Delta) \\ \Rightarrow \quad & y[n] = y_c(nT) = x_c(nT - T\Delta) \\ & \qquad = \sum x[k] \left. \frac{\sin[\pi(t - T\Delta - kT)/T]}{\pi(t - T\Delta - kT)/T} \right|_{t=nT}. \end{aligned}$$

系統的脈衝響應函數爲

$$h[n] = \frac{\sin \pi(n-\Delta)}{\pi(n-\Delta)}.$$

Δ 爲整數時，$h[n] = \delta[n-\Delta]$，也就是

$$y[n] = x[n-\Delta].$$

Δ 不爲整數時，

$$y[n] = y_c(nT) = x_c(nT - \Delta T).$$

從時間延遲後的連續時間訊號取樣得 $y[n]$。

變換取樣率

給定

$$x[n] = x_c(nT).$$

想要

$$x'[n] = x_c(nT').$$

希望不經重建 $x_c(t)$ 就得到 $x'[n]$。

壓縮器 compressor

壓縮器，或稱離散時間取樣器，表示成

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_d[n]$$

而其中 $x_d[n] = x[nM]$。

頻譜關係

若 $x[n]$ 為 $x_c(nT)$ 之取樣，$x[n]=x_c(nT)$，則

$$x_d[n]=x[nM]=x_c(nMT)=x_c(nT'),\quad T'=MT.$$

所以其頻譜關係為

$$\begin{aligned}X_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T'}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T'}-\frac{2\pi r}{T'}\right)\right)\\ &= \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT}-\frac{2\pi r}{MT}\right)\right).\end{aligned}$$

頻譜關係

不同 r 的累加可以分成一段一段。令 $r = kM + i$，其中不同 k 為不同頻段，i 則是同一頻段裡不同頻率。也就是

$$\begin{aligned}
X_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT}-\frac{2\pi i}{MT}-\frac{2\pi kM}{MT}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k} X_c\left(j\left(\frac{\frac{\omega-2\pi i}{M}}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right),
\end{aligned}$$

其中代入了 $X_c(j\Omega)$ 與 $X(e^{j\omega})$ 之頻譜關係。

無交疊條件

假設沒有交疊失真，$\Omega_N \leq \pi/T$，令

$$\omega_N = \Omega_N T \leq \pi.$$

區間 $[-\omega_N, \omega_N]$ 裡的 $X(e^{j\omega})$ 包含頻譜 $X_c(j\Omega)$ 的所有資訊。然而 $X_d(e^{j\omega})$ 仍可能有交疊失真。沒有交疊失真的條件爲

$$\Omega_N \leq \frac{\pi}{MT},$$

相當於

$$\omega_N \leq \frac{\pi}{M}.$$

也就是 $X(e^{j\omega})$ 的頻帶需限於

$$\left[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}\right].$$

降頻器 decimator

降頻器爲低通濾波器與壓縮器之串聯

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LPS}} \xrightarrow{\tilde{x}[n]} \boxed{\downarrow M} \longrightarrow \tilde{x}_d[n] = \tilde{x}[nM]$$

將取樣頻率降低 M 倍應以此爲之。

若 $X(e^{j\omega})$ 頻帶不限於 $\left[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}\right]$，則

$$\tilde{x}[nM] \neq x[nM],$$

因爲有交疊失眞。

膨脹器 expander

膨脹器定義爲

$$x_e[n] = (n\%L == 0)\ ?\ x[n/L]\ :\ 0.$$

也就是在輸入訊號裡插入許多 0。相當於

$$x_e[n] = \sum_k x[k]\delta[n - kL].$$

膨脹器表示爲

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x_e[n]$$

頻譜關係

$x_e[n]$ 之頻譜爲

$$
\begin{aligned}
X_e(e^{j\omega}) &= \sum_n x_e[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_n \sum_k x[k]\delta[n-kL]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_k x[k]e^{-j\omega Lk} \\
&= X(e^{j\omega L}).
\end{aligned}
$$

爲 $X(e^{j\omega})$ 之壓縮版。$[-\pi,\pi]$ 之間的 $X(e^{j\omega})$ 對應到 $[-\pi/L,\pi/L]$ 之間的 $X_e(e^{j\omega})$。

內插器 interpolator

內插器爲膨脹器與低通濾波器之串聯

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{x_e[n]} \boxed{\text{LPS}} \longrightarrow x_i[n]$$

將取樣頻率提昇 L 倍應以此爲之。

時域公式

代入低通濾波器之脈衝響應函數

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L},$$

可得

$$\begin{aligned} x_i[n] &= \sum_m x_e[m]h_i[n-m] \\ &= \sum_m \sum_k x[k]\delta[m-kL]h_i[n-m] \\ &= \sum_k x[k]h_i[n-kL] \\ &= \sum_k x[k]\frac{\sin(\pi(n-kL)/L)}{\pi(n-kL)/L}. \end{aligned}$$

以非整數倍數改變取樣頻率

利用內插器與降頻器的串接可以非整數倍數改變取樣頻率

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{x_e[n]} \boxed{\text{LPS}} \xrightarrow{\tilde{x}_i[n]} \boxed{\downarrow M} \longrightarrow \tilde{x}_d[n]$$

其中低通濾波器的截止頻率爲

$$\min(\pi/M, \pi/L).$$

例如，當 $L = 100$、$M = 101$，

$$T' = M(T/L) = 1.01T.$$

現實訊號與現實系統

理想系統與現實系統

理想的系統爲

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{C/D}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{\text{DTS}} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{D/C}} \longrightarrow y_r(t)$$

現實的系統則爲

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{a.a.f.}} \xrightarrow{x_a(t)} \boxed{\text{s.a.h.}} \xrightarrow{x_0(t)} \boxed{\text{A/D}} \xrightarrow{\hat{x}[n]}$$

$$\xrightarrow{\hat{x}[n]} \boxed{\text{DTS}} \xrightarrow{\hat{y}[n]} \boxed{\text{D/A}} \xrightarrow{y_{DA}(t)} \boxed{\text{c.r.f.}} \longrightarrow \hat{y}_r(t)$$

防交疊濾波器 anti-aliasing filter

防交疊濾波器作用於輸入連續時間訊號

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{a.a.f.}} \xrightarrow{x_a(t)} \boxed{\text{C/D}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{\text{DTS}} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{D/C}} \longrightarrow y_r(t)$$

防交疊濾波器的頻率響應應爲

$$H_{aa}(j\Omega) = \left(|\Omega| < \frac{\pi}{T}\right) \ ?\ 1 \ :\ 0.$$

實際上，因爲不易達成立即截止，通常以簡單的防交疊濾波器代替，然後再透過過度取樣器與降頻器處理

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{s.a.a.f.}} \xrightarrow{x_a(t)} \boxed{\text{o.s. C/D}} \xrightarrow{\hat{x}[n]} \boxed{\text{decimator}} \longrightarrow x[n] \ldots$$

連續時間到離散時間轉換器 C/D converter

C/D converter 通常爲取樣保持器 (sample-and-hold system) 與類比數位轉換器 (A/D converter) 的串聯

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{\text{s.a.h.}} \xrightarrow{x_0(t)} \boxed{\text{A/D}} \longrightarrow \hat{x}[n]$$

取樣保持器爲

$$x_0(t) = \sum_n x_a(nT)h_0(t - nT),$$

其中

$$h_0(t) = (0 < t < T)\ ?\ 1\ :\ 0.$$

類比數位轉換器將連續值轉爲離散值，可引起量化誤差 quantization errors。

離散時間到連續時間轉換器 D/C converter

D/C converter 通常爲數位類比轉換器 (D/A converter) 與補償器 (compensated reconstruction filter) 的串聯

$$\hat{y}[n] \longrightarrow \boxed{\text{D/A}} \xrightarrow{y_{DA}(t)} \boxed{\text{c.r.f}} \longrightarrow \hat{y}_r(t)$$

數位類比轉換器爲 0 階保持器，頻率響應爲 $H_0(j\Omega)$。補償器則是補償理想重建器與 0 階保持器的差異

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}.$$