z 轉換
z-Transform

陳嘉平 老師

國立中山大學資訊工程學系

102 學年度 離散訊號處理

本節大綱

- z 轉換
  z-transform
- 收斂區域
  region of convergence
- 逆轉換
  inverse z-transform
- 性質
  properties

z 轉換 z-transform

訊號 $x[n]$ 的 z 轉換定義爲

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

1. 右邊的級數必須收斂 $X(z)$ 才有意義。
2. 將訊號由變數 n 的函數轉換爲變數 z 的函數。
3. z 轉換表示成

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

或是

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}.$$

收斂區域 region of convergence

收斂區域，簡稱 ROC，爲級數

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

收斂的 z 點構成的區域。

右邊訊號 right-sided sequence

向右延伸至 ∞ 的訊號爲右邊訊號。

左邊訊號 left-sided sequence

向左延伸至 $-\infty$ 的訊號爲左邊訊號。

兩邊訊號 two-sided sequence

既是左邊訊號又是右邊訊號者爲兩邊訊號。

有限長度訊號 finite-length sequence

既不是左邊訊號也不是右邊訊號者爲有限長度訊號。

Examples

1. 右邊訊號 $x_1[n] = a^n u[n]$ 的 z 轉換級數收斂時爲

$$\sum_n x_1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

2. 左邊訊號 $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$ 的 z 轉換級數收斂時爲

$$\begin{aligned}\sum_n x_2[n] z^{-n} &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.\end{aligned}$$

收斂區域比較

$x_1[n]$ 的 z 轉換要收斂，必須

$$|az^{-1}| < 1, \quad i.e. \quad |z| > |a|.$$

因此 ROC 爲

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

$x_2[n]$ 的 z 轉換要收斂，必須

$$|a^{-1}z| < 1, \quad i.e. \quad |z| < |a|.$$

因此 ROC 爲

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|.$$

Example

兩個右邊訊號之和

$$x_3[n] = a[n] + b[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

仍爲右邊訊號。因爲 z 轉換爲線性，所以轉換函數爲個別轉換函數之和

$$X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

其 ROC 爲原兩收斂區域之交集。

Example

一個左邊訊號與一個右邊訊號之和

$$x_4[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

爲雙邊訊號。同理，

$$X_4(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}.$$

常見 z 轉換

整理於 Table 3.1

零點與極點 zero and pole

1. $X(z)=0$ 的點稱爲零點。
2. $X(z)$ 不爲有限的點稱爲極點。

顯然，若

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

則 $P(z)=0$ 決定零點、$Q(z)=0$ 決定極點。

極零圖 pole-zero plot

1. 以 z 平面為背景
2. 以 $\times$ 表示極點，以 $\circ$ 表示零點
3. ROC 塗上陰影
4. 畫出單位圓 unit circle

參考 Figures 3.3–3.7。

z 轉換與離散時間傅立葉轉換

1. 離散時間傅立葉轉換爲 z 轉換在單位圓上面的值

$$X(e^{j\omega}) = \sum x[n]e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

2. z 轉換爲 $x[n]|z|^{-n}$ 的傅立葉轉換

$$X(z) = X(|z|e^{j\omega}) = \sum (x[n]|z|^{-n})e^{-j\omega n}.$$

關於收斂區域

1. ROC 爲圓環 **ring** 或圓盤 **disk**，其中心爲原點。
2. ROC 包含單位圓，則離散時間傅立葉轉換爲收斂。
3. ROC 不可包含任何極點。
4. 有限長度訊號之 ROC 爲整個 z 平面。
5. 右邊訊號的 ROC 從離原點最遠的有限極點延伸至 ∞。
6. 左邊訊號的 ROC 從離原點最近的有限極點延伸至原點。
7. 雙邊訊號的 ROC 只能是圓環。
8. ROC 爲一連通區域。

收斂區域之形狀

把 ROC 表示成

$$0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty.$$

1. 右邊訊號時爲
$$|z| > r_R.$$
2. 左邊訊號時爲
$$|z| < r_L.$$
3. 雙邊訊號時爲
$$r_R < |z| < r_L.$$

逆轉換 inverse z-transform

定義爲

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

其中 C 爲一環繞原點的逆時針路徑。

通常我們並非直接找 $x[n]$，而是透過以下方法。

檢視法 inspection

看看 $X(z)$ 是否爲已知形式。如此，則代入對應的訊號形式

$$x[n] \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X(z).$$

例如，

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

爲熟悉的形式，因此

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

部分分式法 partial fraction

將有理分式

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

分解成

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

若 $M < N$ 且極點爲一階，則 $X(z)$ 可表示爲部分分式

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}},$$

其中

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z)|_{z=d_k}.$$

$X(z)$ 的逆轉換爲指數訊號的線性組合，其中每一項對應到

$$\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}.$$

該項爲右邊訊號或左邊訊號由 d_k 與收斂區域決定。$|d_k| \leq r_R$ 時爲右邊，$|d_k| \geq r_L$ 時爲左邊。

Example (例題 3.8)

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

可以表示成部分分式

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},$$

其中

$$A_1 = \left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = -1,\ A_2 = \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2.$$

因此，

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Example (例題 3.9)

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})},\quad |z|>1.$$

可以表示成

$$X(z)=B_0+\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}.$$

B_0 可用長除法找出。

冪級數展開 power series expansion

將 $X(z)$ 以冪級數展開

$$X(z) = \sum_k \alpha_k z^{-k}.$$

因爲

$$X(z) = \sum x[n] z^{-n},$$

所以

$$x[n] = \alpha_n.$$

Example

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > a.$$

因爲

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n},$$

$X(z)$ 可以表示成

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} \right) z^{-n}.$$

因此

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

線性 linearity

$$a x_1[n] + b x_2[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad a X_1(z) + b X_2(z).$$

時間平移 time shifting

$$x[n-n_0] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad z^{-n_0} X(z).$$

證明

$$\sum_n x[n-n_0] z^{-n} = \sum_{n'} x[n'] z^{-(n'+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{n'} x[n'] z^{-n'}$$
$$= z^{-n_0} X(z).$$

Example

$$\left({}^1\!/_4\right)^{n-1} u[n-1] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

以指數訊號調變 multiplication by exponential sequence

$$z_0^n x[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

證明

$$\sum_n z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_n x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

Example

$y[n] = (r^n \cos\omega_0 n) u[n]$.

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}$$
$$= \frac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

z 轉換函數微分 differentiation

$$nx[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad -z\frac{dX(z)}{dz}$$

證明

$$\begin{aligned} -z\frac{dX(z)}{dz} &= -z\sum x[n]\frac{dz^{-n}}{dz} = -z\sum x[n](-n)z^{-n-1} \\ &= \sum \left(nx[n]\right) z^{-n}. \end{aligned}$$

Example

$$X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right), \quad |z| > a.$$

1. 微分 $X(z)$
2. 乘上 $-z$
3. 找出逆轉換f
4. 除以 n

Example

找 $Y(z)$，其中

$$y[n] = na^n u[n].$$

因為

$$y[n] = nx[n] \quad \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \quad -z\frac{dX(z)}{dz} = Y(z).$$

令 $x[n] = a^n u[n]$，可得

$$Y(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

共軛 conjugation

$$x^*[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X^*(z^*), \quad R = R_x$$

時間反轉 time reversal

$$x[-n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Example

$x[n] = a^{-n}u[-n]$, $a \in \mathbb{R}$ 爲 $y[n] = a^n u[n]$ 的時間反轉訊號。而 $Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$，所以

$$X(z) = Y\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-az}.$$

摺積定理 convolution theorem

$$x_1[n] * x_2[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X_1(z)X_2(z)$$

證明

令

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n],$$

其 z 轉換爲

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y[n]z^{-n} = \sum_n \sum_m x_1[m]x_2[n-m]z^{-n} \\ &= \sum_n \sum_m x_1[m]x_2[n-m]z^{-(n-m)}z^{-m} \\ &= \sum_m x_1[m]z^{-m} \sum_{n'(=n-m)} x_2[n']z^{-n'} = X_1(z)X_2(z). \end{aligned}$$

Example

$x_1[n] * x_2[n]$ 摺積爲何？其中

$$x_1[n] = a^n u[n], \quad x_2[n] = u[n], \quad |a| < 1.$$

$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$。根據摺積定理，

$$\begin{aligned} Y(z) = X_1(z)X_2(z) &= \left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right). \end{aligned}$$

由檢視法，可得

$$y[n] = \frac{1}{1-a}\left(u[n] - a^{n+1}u[n]\right).$$